РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ 2014
II курс

Задача 1 (5 баллов)

Вычислить определитель 2014-го порядка

$$\Delta_{2014} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение

Сложим все строки определителя и запишем в первую строку, получим

$$\Delta_{2014} = \begin{vmatrix} 2013 & 2013 & 2013 & \dots & 2013 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 2013 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Вычтем из каждой строки первую строку:

$$\Delta_{2014} = 2013 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = 2013 \cdot 1 \cdot (-1)^{2013} = -2013.$$

Ответ: $\Delta_{2014} = -2013.$

Задача 2 (6 баллов)

На одном первобытном базаре шкуру мамонта можно обменять на две шкуры тигра, а юбку из перьев павлина – на три каменных топора. На другом базаре, расположенном в одном дне пути от первого, шкуру мамонта можно обменять на три юбки из перьев павлина, а шкуру тигра – на четыре каменных топора. Обмен возможен в обе стороны. Охотник принёс на первый базар шкуру мамонта и хочет её обменять на четыре шкуры тигра. Сможет ли он это сделать за 33 дня?

Решение

Обозначим: ШМ – шкура мамонта,
ШТ – шкура тигра,
ЮП – юбка из перьев павлина,
КТ – каменный топор.

Тогда на первом базаре: 1 ШМ = 2 ШТ, 1 ЮП = 3 КТ;
на втором базаре: 1 ШМ = 3 ЮП, 1 ШТ = 4 КТ.

Действия охотника можно определить таким образом:

№ дня	№ базара	Обмен
1	1 базар	нет
2	2 базар	1 ШМ = 3 ЮП
3	1 базар	3 ЮП = 9 КТ
4	2 базар	9 КТ = 2 ШТ + 1 КТ
5	1 базар	2 ШТ + 1 КТ = 1 ШМ + 1 КТ
…	…	…
9	1 базар	2 ШТ + 2 КТ = 1 ШМ + 2 КТ
…	…	…
13	1 базар	2 ШТ + 3 КТ = 1 ШМ + 3 КТ
…	…	…
17	1 базар	2 ШТ + 4 КТ = 1 ШМ + 4 КТ
…	…	…
21	1 базар	2 ШТ + 5 КТ = 1 ШМ + 5 КТ
…	…	…
25	1 базар	2 ШТ + 6 КТ = 1 ШМ + 6 КТ
…	…	…
29	1 базар	2 ШТ + 7 КТ = 1 ШМ + 7 КТ
30	2 базар	1 ШМ + 7 КТ = 3 ЮП + 7 КТ
31	1 базар	3 ЮП + 7 КТ = 16 КТ
32	2 базар	16 КТ = 4 ШТ

Ответ: Охотник успеет совершить обмен за 33 дня.

Задача 3 (5 баллов)

Решить дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{y}{x+2y^3}$ при $x = 1,\ y = 1.$

Решение

$$y' = \frac{y}{x+2y^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+2y^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x+2y^3}{y} \quad \Rightarrow \quad x' - \frac{x}{y} = 2y^2$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение I порядка.
Заменим $x = u\,v,\ x' = u'v + u\,v'.$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = 2y^2 \quad \Rightarrow \quad v\,(u' - \frac{u}{y}) + uv' = 2y^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u' - \dfrac{u}{y} = 0, (1) \\ u\,v' = 2y^2. (2) \end{cases}$$

1) $\quad u' - \dfrac{u}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dy} = \dfrac{u}{y} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{u} = \dfrac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \int \dfrac{du}{u} = \int \dfrac{dy}{y} \quad \Rightarrow$

$$\ln|u| = \ln|y| \quad \Rightarrow \quad u = y.$$

2) $\quad uv' = 2y^2 \quad \Rightarrow \quad yv' = 2y^2 \quad \Rightarrow \quad v' = 2y \quad \Rightarrow \quad v = y^2 + C.$

3) $\quad x = uv = y(y^2 + C) = y^3 + yC.$

Найдем частное решение дифференциального уравнения при $x = 1,\ y = 1.$

$1 = 1(1 + C) \quad \Rightarrow \quad C = 0.$

Частное решение имеет вид: $x = y^3 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{x}.$

Ответ: $y = \sqrt[3]{x}$ - искомое частное решение.

Задача 4 (4 балла)

Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x} \cdot \sin x\, dx.$

Решение

$$\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x} \cdot \sin x\, dx = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2 x} \cdot \sin x\, dx = \sqrt{2}\int\limits_0^{\pi} |\cos x| \cdot \sin x\, dx =$$

$$= \left[|\cos x| = \begin{cases} \cos x, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos x, \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases} \right] = \sqrt{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin x\, dx - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \cdot \sin x\, dx \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, dx - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\, dx \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \cos(2 \cdot 0) + \cos(2 \cdot \pi) - \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+1+1+1) = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x} \cdot \sin x\, dx = \sqrt{2}.$

Задача 5 (7 баллов)

Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

Решение

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}1+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)=n+\frac{1}{n}\big(1+2+\ldots+(n-1)\big)=n+\frac{1}{n}\cdot\frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)=$$

$$=n+\frac{n-1}{2}=\frac{3n-1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot\frac{3n-1}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=3.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)=3.$

Задача 6 (8 баллов)

Задана функция $f(x)=(x-1)\cdot\left(\sqrt[4]{x+\sqrt{x}-1}+(x-1)\cdot\sqrt[5]{x+2\sqrt[4]{x}}\right)$. Найти $f'(1)$.

Решение

$$f'(x)=\left(\sqrt[4]{x+\sqrt{x}-1}+(x-1)\cdot\sqrt[5]{x+2\sqrt[4]{x}}\right)+(x-1)\cdot\left(\sqrt[4]{x+\sqrt{x}-1}+(x-1)\cdot\sqrt[5]{x+2\sqrt[4]{x}}\right)'.$$

Очевидно, $f'(1)=\sqrt[4]{1+1-1}=1.$

Ответ: $f'(1)=1.$

Задача 7 (4 баллов)

Решить дифференциальное уравнение $y'(x)=y(x)+\int\limits_0^1 y(x)dx.$

Решение

Так как $\int\limits_0^1 y(x)dx=C=const$, то $y'=y+C$.

Решим уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=y+C\quad=>\quad\frac{dy}{y+C}=dx\quad=>\quad\ln|y+C|=x+\ln C_1\quad=>\quad y+C=C_1e^x\quad=>$$

$$=>\quad y=C_1e^x-C.$$

Найдём коэффициент C:

$$C=\int_0^1(C_1e^x-C)dx=C_1e^x\Big|_0^1-Cx\Big|_0^1=C_1e-C_1-C\quad=>\quad 2C=C_1(e-1).$$

Таким образом, $C=\dfrac{1}{2}C_1(e-1)$. Решение принимает вид $y=C_1e^x-\dfrac{1}{2}C_1(e-1)$.

Ответ: $y=C_1e^x-\dfrac{1}{2}C_1(e-1).$

Задача 8 (5 баллов)

Заданы функции $f(x)=\begin{cases}1, x\le 1,\\ 0, x>1\end{cases}$ и $g(x)=\begin{cases}2-x^2, |x|\le 2,\\ 2, \quad |x|>2\end{cases}$. Построить график функции $y=f(g(x))$.

<u>Решение</u>

На рис. 1 построен график функции $y=g(x)$.

Тогда график $y=f(g(x))$ выглядит так, как на рис. 2.

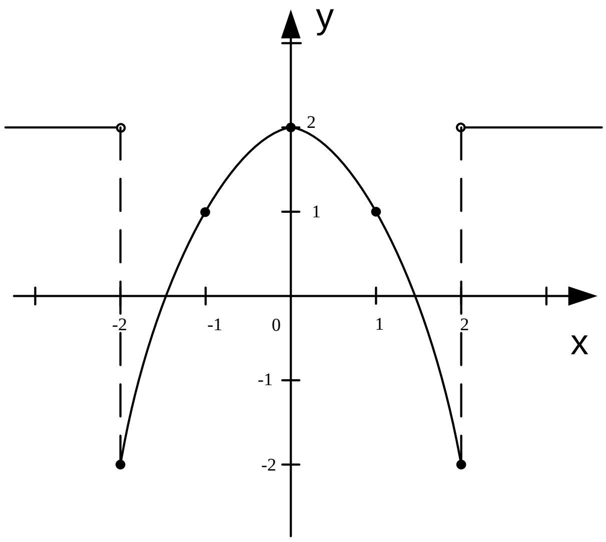


Рис. 1.

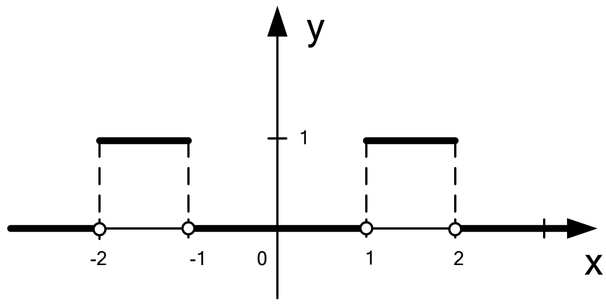


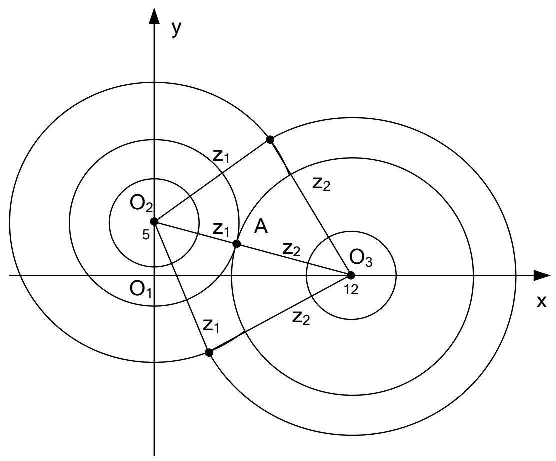
Рис. 2.

Задача 9 (10 баллов)

Чему равно минимальное значение выражения

$$\sqrt{(x-12)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-5)^2}.$$

<u>Решение</u>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Решим задачу геометрически.
Пусть z_1 и z_2 – радиусы окружностей, тогда
$$z_1=\sqrt{(x-12)^2+y^2}$$
$$z_2=\sqrt{x^2+(y-5)^2}.$$
Чем больше радиусы, тем больше значения выражения
$$\sqrt{(x-12)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-5)^2}.$$
Покажем точки пересечения этих окружностей (см. рис. 3).</td>
</tr>
<tr>
<td>Рис. 3.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Значение выражения $\sqrt{(x-12)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-5)^2}$ – это значение суммы (z_1+z_2). Из неравенства треугольников следует, что сумма (z_1+z_2) будет наименьшей, если радиусы z_1 и z_2 лежат на одной прямой, т.е. окружности касаются в точке A. Тогда по теореме Пифагора из $\Delta_{O_1O_2O_3}$ значение $(z_1+z_2)=\sqrt{25+144}=13$.

Ответ: минимальное значение выражения $\sqrt{(x-12)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-5)^2}$ равно 13.

Задача 10 (6 баллов)

Имеется три ящика и пять призов. Каждый приз независимо от других помещают в произвольный ящик. Какова вероятность, что хотя бы один ящик окажется пустым?

Решение

Событие А – {хотя бы один ящик окажется пустым}.
Первый способ (по классическому определению вероятности).
Подсчитаем количество все исходов опыта.
У каждого приза есть три варианта: попасть в первый ящик, во второй или в третий, поэтому количество всех исходов: $\overline{A}_3^5=3^5=243$.

Подсчитаем количество благоприятных исходов:

1. Все пять призов попали в один ящик: или первый, или второй или третий, то есть всего три варианта.
2. Призы попали в два из трех ящиков.
   Например, пусть призов нет в третьем ящике, тогда каждый приз может попасть или в первый, или во второй ящик, поэтому всего исходов: $\overline{A}_2^5=2^5=32$. Но они включают в себя варианты попадания всех призов в один ящик, поэтому благоприятных исходов $(2^5-2)=(32-2)=30$.
   Так как пустым может оказаться один из трех ящиков, то количество исходов: $3\cdot(2^5-2)=3\cdot 30=90$.

Таким образом, число благоприятных исходов: 90 + 3 = 93.

Вероятность того, что хотя бы один ящик оказался пустым: $P(A)=\dfrac{93}{243}=\dfrac{31}{81}$.

Второй способ (по схеме полиномиального распределения).
Найдем вероятность обратного события $\overline{A}$ - {пустых ящиков нет}.

$$P(\overline{A})=3p(3,1,1)+3p(2,2,1)=\frac{3\cdot 5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1+\frac{3\cdot 5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{50}{81}.$$

Тогда искомая вероятность $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{50}{81}=\dfrac{31}{81}$.

Ответ: хотя бы один ящик окажется пустым с вероятностью $\dfrac{31}{81}$.